

УДК 539.3

**МЕТОД КОНЕЧНЫХ СУММ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКИХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ВИДАХ НАГРУЖЕНИЯ<sup>1)</sup>****В.Н.ПАЙМУШИН<sup>1,2</sup>, С.А.ЛУКАНКИН<sup>2</sup>, С.А.ХОЛМОГОРОВ<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Казанский (Приволжский) федеральный университет, <sup>2</sup> Казанский национальный исследовательский технический университет им.А.Н.Туполева – КАИ  
*E-mail* vpajmushin@mail.ru; lukankin.sergej@yandex.ru; hkazan@yandex.ru

**FINITE SUM METHOD IN BUCKLING PROBLEM OF PLANAR CURVILINEAR BAR UNDER THE ARBITRARY LOAD CONDITION****V.N.PAIMUSHIN<sup>1,2</sup>, S.A.LUKANKIN<sup>2</sup>, S.A.KHOLMOGOROV<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Kazan Federal University, <sup>2</sup> Kazan National Research Technical Tupolev University

**Аннотация**

Предложена численная методика решения линеаризованных задач устойчивости равновесия плоских криволинейных стержней, основанная на методе механических квадратур (конечных сумм). Используются уточнённые уравнения теории стержней, позволяющие выявить все возможные классические и неклассические формы потери устойчивости при учёте и без учёта деформационных параметрических слагаемых. Показано, что учёт докритического деформирования стержней может привести к значительному уточнению как величины критических нагрузок, так и форм потери устойчивости, если действующая нагрузка является локализованной.

**Ключевые слова:** плоский криволинейный стержень, устойчивость, метод конечных сумм, кольцо, арка.

**Summary**

Numerical procedure of solving linearized problem of buckling planar curvilinear bars is proposed. Procedure based on the mechanical quadrature method (finite sum method). Refined equations of bar theory, which allow to disclose all classical and non-classical buckling modes in case of accounting and without accounting initial strain summands are used. Shown, that initial strain accounting of bars may lead to significant correction of buckling load and buckling mode, if external load is localized.

**Key words:** planar curvilinear bar, buckling, finite sum method, ring-frame, arch.

**1. Постановка задачи**

Рассмотрим плоский криволинейный стержень, для пространства которого принята параметризация

$$\mathbf{R}(x, y, z) = \mathbf{r}(x) + \rho(x, y, z) = \mathbf{r}(x) + y\mathbf{n}(x) + z\mathbf{b}(x), \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}(x)$  — уравнение осевой линии  $L$ , отнесённой к лонгальному параметру  $x$ ;  $\mathbf{t} = \mathbf{r}' = d\mathbf{r}/dx$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  — единичные векторы естественного базиса осевой линии. Для аппроксимации вектора перемещений стержня примем представление

$$\mathbf{U} = (u + z\psi - y\chi)\mathbf{t} + (v - z\varphi + y\gamma_2)\mathbf{n} + (w + y\varphi + z\gamma_3)\mathbf{b}, \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Работа выполнена за счёт средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров.



## 2. Сведение задачи к системе интегро-алгебраических уравнений

Для матричной записи основных соотношений введём векторы неизвестных

$$\{U\} = (w, \psi, \varphi, u, \vartheta, \chi, \gamma_2, \gamma_3)^T, U \in \text{Re}(8, 1) \quad (8)$$

$$\{dU\} = (w', \psi', \varphi', u', \vartheta', \chi', \gamma_2', \gamma_3')^T, dU \in \text{Re}(8, 1) \quad (9)$$

$$\{T\} = (Q_x, T_y, T_z, M_y, M_z, Q_y, Q_z, M_{xy}, M_{xz}, S_{xz}, M_x, S_{xy})^T, T \in \text{Re}(12, 1) \quad (10)$$

$$\{Q\} = (Q_x^*, Q_y^*, Q_z^*, S_x^*, S_y^*, M_y^*, N_z^*, M_z^*, N_y^*, S_{xz}^*, T_z^*, S_{xy}^*, T_y^*, N_x^*)^T, Q \in \text{Re}(15, 1) \quad (11)$$

Здесь и далее  $\text{Re}(m, n)$  —  $(m, n)$ -мерное линейное пространство всех вещественных матриц размером  $(m, n)$ . Тогда физические соотношения (6) и обобщённые усилия и моменты (5) в матричной форме запишутся в виде

$$\begin{aligned} \{T\} &= ([A] + [A^0]) \{U\} + ([B] + [B^0]) \{dU\}, \\ \{Q\} &= ([E] + [E^0]) \{T\} + [T_U^0] \{U\} + [T_{dU}^0] \{dU\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $[A], [A^0], [B], [B^0] \in \text{Re}(8, 12), [E], [E^0] \in \text{Re}(15, 12), [T_U^0], [T_{dU}^0] \in \text{Re}(15, 8)$  — матрицы с функциональными коэффициентами, равными сомножителям при компонентах векторов  $\{U\}, \{dU\}, \{T\}, \{Q\}$  в выражениях (5), (6). Используя (12), линеаризованные уравнения нейтрально-го равновесия (4) представим в матричном виде

$$\frac{d}{dx} ([dD] \{Q\}) + [D] \{Q\} = \{0\}, \quad (13)$$

где  $[dD]$  и  $[D] \in \text{Re}(8, 15)$  — матрицы с функциональными коэффициентами, равными сомножителям при компонентах вектора  $\{Q\}$  в уравнениях (4). После подстановки (8)–(12) в (13) и ряда преобразований равенство (13) переписывается в виде

$$\begin{aligned} & -\frac{d}{dx} [([\bar{\mu}] + p[\bar{\mu}_p] + p^2[\bar{\mu}_{p^2}]) \{U\} + ([d\bar{\mu}] + p[d\bar{\mu}_p] + p^2[d\bar{\mu}_{p^2}]) \{dU\}] + \\ & + [([\eta] + p[\eta_p] + p^2[\eta_{p^2}]) \{U\} + ([d\eta] + p[d\eta_p] + p^2[d\eta_{p^2}]) \{dU\}] = \{0\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} [\bar{\mu}] &= -[\mu], [\bar{\mu}_p] = [\mu_p], [d\bar{\mu}] = -[d\mu], \\ [d\bar{\mu}_p] &= -[d\mu_p], [\bar{\mu}_{p^2}] = -[\mu_{p^2}], [d\bar{\mu}_{p^2}] = -[d\mu_{p^2}], \\ [\mu] &= [dD][E][A], [\mu_p] = [dD]([E][A^0] + [E^0][A] + [T_U^0]), \\ [\mu_{p^2}] &= [dD][E^0][A^0], \\ [d\mu] &= [dD][E][B], [d\mu_p] = [dD]([E][B^0] + [E^0][B] + [T_{dU}^0]), \\ [d\mu_{p^2}] &= [dD][E^0][B^0], \\ [\eta] &= [D][E][A], [\eta_p] = [D]([E][A^0] + [E^0][A] + [T_U^0]), \\ [\eta_{p^2}] &= [D][E^0][A^0], \\ [d\eta] &= [D][E][B], [d\eta_p] = [D]([E][B^0] + [E^0][B] + [T_{dU}^0]). \end{aligned} \quad (15)$$

Проинтегрируем далее уравнение (14) по  $x \in [x, L_K]$ , сводя его к равенству

$$\begin{aligned} & \{C\} + [([\bar{\mu}] + p[\bar{\mu}_p] + p^2[\bar{\mu}_{p^2}]) \{U\} + ([d\bar{\mu}] + p[d\bar{\mu}_p] + p^2[d\bar{\mu}_{p^2}]) \{dU\}] + \\ & + \int_x^{L_K} [([\eta] + p[\eta_p] + p^2[\eta_{p^2}]) \{U\} + ([d\eta] + p[d\eta_p] + p^2[d\eta_{p^2}]) \{dU\}] dx = \{0\}, \end{aligned} \quad (16)$$

где вектор  $\{C\} = (c_i, i \in \{1 : 8\})$ ,  $\{C\} \in \text{Re}(8, 1)$  (неизвестных статических констант интегрирования) определяется соотношением

$$\{C\} = [([\mu] + p[\mu_p] + p^2[\mu_{p^2}])\{U\} + ([d\mu] + p[d\mu_p] + p^2[d\mu_{p^2}])\{dU\}]|_{x=L_K} \quad (17)$$

В матричном уравнении (17) выполним замену по правилу

$$\{U\} = \int_0^x \{dU\} dx + \{k\}, \quad (18)$$

где  $\{k\} = (k_i = U_i|_{x=0}, i \in \{1 : 8\})$ ,  $\{k\} \in \text{Re}(8, 1)$  – вектор с компонентами, равными неизвестным кинематическим константам интегрирования. С учётом (18) равенство (16) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \{C\} + \left[ ([\bar{\mu}] + p[\bar{\mu}_p] + p^2[\bar{\mu}_{p^2}]) \left( \int_0^x \{dU\} dx + \{k\} \right) + ([d\bar{\mu}] + p[d\bar{\mu}_p] + p^2[d\bar{\mu}_{p^2}]) \{dU\} \right] + \\ + \int_x^{L_K} \left[ ([\eta] + p[\eta_p] + p^2[\eta_{p^2}]) \left( \int_0^x \{dU\} dx + \{k\} \right) + ([d\eta] + p[d\eta_p] + p^2[d\eta_{p^2}]) \{dU\} \right] dx = \{0\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Для матричного представления граничных условий введём в рассмотрение вектор  $\{R\} = (r_i, i \in \{1 : 8\})$ ,  $\{R\} \in \text{Re}(8, 1)$

$$\{R\} = [[\mu]\{U\} + [d\mu]\{dU\} + p([\mu_p]\{U\} + [d\mu_p]\{dU\}) + p^2([\mu_{p^2}]\{U\} + [d\mu_{p^2}]\{dU\})]. \quad (20)$$

Обозначим матрицы, у которых отличными от нуля могут быть только диагональные компоненты  $l_{ii}^0, l_{ii}^{L_K}, i \in \{1 : 8\}$ , как  $[l_0], [l_K]$ . Значение диагональных коэффициентов определяется видом граничных условий. Если перемещение или угол поворота на торце  $x = 0$  или  $x = L_K$  зафиксированы, то значения соответствующего компонента  $l_{ii}^0, l_{ii}^{L_K}, i \in \{1 : 8\}$  равно нулю. В противном случае оно равно единице. Единичную матрицу обозначим как  $[E] \in \text{Re}(4, 4)$ . С учётом введённых величин граничные условия можно представить в комбинированной матричной форме

$$\begin{aligned} ([E] - [l_0])\{k\} + [l_0]\{R\}|_{x=0} &= 0, \\ ([E] - [l_K])\{U\}|_{x=L_K} + [l_K]\{C\} &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где учено, что  $\{U\}|_{x=0} = \{k\}$ ,  $\{R\}|_{x=L_K} = \{C\}$ ,  $\{U\}|_{x=L_K} = \int_0^{L_K} \{dU\} dx + \{k\}$ .

Численное решение уравнений (19), (21) методом механических квадратур требует замены входящих в них интегральных операторов конечно-суммарными с использованием тех или иных квадратурных формул относительно дискретных узловых значений искомого неизвестного. Такой метод в литературе получил название метода интегрирующих матриц. Один из его вариантов предложен в [2]. В соответствии с этим методом на отрезке  $[0, L_K]$  построим сетку  $\omega = \{x_1 = 0 < x_2 < x_3 \dots < x_{n-1} < x_n = L_K\}$  и введём в рассмотрение множество  $A = \{1 : 8n\}$ , необходимое для нумерации компонент соответствующих матриц. В качестве неизвестных дискретизированной задачи будем рассматривать вектор  $\{dU_n\}$ ,  $\{dU_n\} \in A$ , состоящий из искомого неизвестного в узлах сетки. Тогда столбец компонент вектора перемещений и углов поворота, производные которых образуют вектор неизвестных, обозначим как  $\{U_n\}$ ,  $\{U_n\} \in A$ .

Введём матричные аналоги интегральных операторов

$$[I_n] = (j_{jk}, j, k \in A), [I_n^*] = (j_{jk}^*, j, k \in A), [I_n], [I_n^*] \in \text{Re}(A, A). \quad (22)$$

Эти матрицы представляют собой блочно-диагональные матрицы с соответствующими интегрирующими матрицами  $[I], [I^*] \in \text{Re}(n, n)$  в качестве блоков. Интегрирующие матрицы являются аналогами интегральных операторов

$$\int_0^x (\dots) dx \Rightarrow [I], \int_x^{L_K} (\dots) dx = [I^*]. \quad (23)$$

С учётом введённых величин зависимость (18) примет вид

$$\{U_n\} = [I_n] \{dU_n\} + [E_n] \{k\}, \quad (24)$$

где  $[E_n] \in \text{Re}(A, 8)$  – восьмиблочно-диагональная матрица с ненулевыми единичными столбцами в качестве блоков. Систему уравнений нейтрального равновесия (4), матричная форма которой определяется равенством (19), после замены соответствующих интегральных операторов их матричными аналогами, некоторых преобразований и приведения подобных слагаемых запишем в дискретном матричном виде

$$\begin{aligned} & \llbracket [Z] \{dU\} + [Y] \{k\} + [E_n] \{C\} \rrbracket + p \llbracket [Z_p] \{dU\} + [Y_p] \{k\} \rrbracket + \\ & + p^2 \llbracket [Z_{p^2}] \{dU\} + [Y_{p^2}] \{k\} \rrbracket = \{0\}, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} [Z] &= [\bar{\mu}] [I_n] + [d\bar{\mu}] + [I_n^*] [\eta] [I_n] + [I_n^*] [d\eta], \\ [Y] &= [\bar{\mu}] [E_n] + [I_n^*] [\eta] [E_n], \\ [Z_p] &= [\bar{\mu}_p] [I_n] + [d\bar{\mu}_p] + [I_n^*] [\eta_p] [I_n] + [I_n^*] [d\eta_p], \\ [Z_{p^2}] &= [\bar{\mu}_{p^2}] [I_n] + [d\bar{\mu}_{p^2}] + [I_n^*] [\eta_{p^2}] [I_n] + [I_n^*] [d\eta_{p^2}], \\ [Y_{p^2}] &= [\bar{\mu}_{p^2}] [E_n] + [I_n^*] [\eta_{p^2}] [E_n]. \end{aligned} \quad (26)$$

Для дискретизации граничных условий введём в рассмотрение матрицы  $[E_{1n}] \in \text{Re}(8, A)$  с ненулевыми элементами  $e_{11}^{1n} = e_{2n+1}^{1n} = \dots = e_{8n+1}^{1n} = 1$ , восьмиблочно-диагональную матрицу  $[I_{1n}] \in \text{Re}(8, A)$ , у которой компонентами блоков-строк являются коэффициенты квадратуры Гаусса на  $[0, L_K]$ . Тогда граничные условия (21) в дискретной матричной форме определяются соотношениями

$$\begin{aligned} & \llbracket [R] \{k\} + [L] \{dU\} \rrbracket + p \llbracket [R_p] \{k\} + [L_p] \{dU\} \rrbracket + p^2 \llbracket [R_{p^2}] \{k\} + [L_{p^2}] \{dU\} \rrbracket = \{0\} \text{ при } x = 0 \\ & \llbracket [M] \{dU\} + [N] \{k\} + [S] \{C\} \rrbracket = \{0\} \text{ при } x = L_K, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} [R] &= [E] - [l_0] + [l_0] [\mu_0], [L] = [l_0] [d\mu_0] [E_{1n}], [R_p] = [l_0] [\mu_{0p}], \\ [L_p] &= [l_0] [d\mu_{0p}] [E_{1n}], [R_{p^2}] = [l_0] [\mu_{0p^2}], [L_{p^2}] = [l_0] [d\mu_{0p^2}] [E_{1n}], \\ [M] &= ([E] - [l_K]) [I_{1n}], [N] = [E] - [l_K], [S] = [l_K]. \end{aligned} \quad (28)$$

В (28) компоненты матриц  $[\mu_0]$ ,  $[d\mu_0]$ ,  $[\mu_{0p}]$ ,  $[d\mu_{0p}]$ ,  $[\mu_{0p^2}]$ ,  $[d\mu_{0p^2}] \in \text{Re}(8, 8)$  равны значениям функциональных коэффициентов представления (14) в узле  $x = 0$ .

Объединив (25) и (27) в одну матричную систему, получим

$$([A] + p[B] + p^2[C]) \{X\} = \{0\}, \quad (29)$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} Z & Y & E_n \\ L & R & 0 \\ M & N & S \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} Z_p & Y_p & 0 \\ L_p & R_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [C] = \begin{bmatrix} Z_{p^2} & Y_{p^2} & 0 \\ L_{p^2} & R_{p^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \{X\} = \begin{bmatrix} dU \\ k \\ C \end{bmatrix}$$

Если в соотношениях (5), (6) отбросить деформационные параметрические слагаемые, то матричная система (29) примет вид

$$([A] + p[B]) \{X\} = \{0\}. \quad (30)$$

Решение матричной системы (29) находится итерационным способом. Для этого она представляется в виде

$$([A] + p_{(k)} [[B] + p_{(k-1)} [C]]) \{X\} = \{0\}, \quad (31)$$

где  $k$  – номер итерации. В первом приближении ( $k = 1$ ), матричная система (29) примет вид

$$([A] + p_{(1)} [B]) \{X\} = \{0\} \quad (32)$$

и её найденное собственное значение  $p_{(1)}$  подставляется в (31). Итерации выполняются до того момента, пока погрешность  $\Delta = |(p_{(k)} - p_{(k-1)})/p_{(k)}|$  не станет меньше заданного значения.

### 3. Численное исследование устойчивости кругового кольца при внешнем давлении и обжатии

Для проведения анализа получаемых результатов введём безразмерные параметры

$$\varepsilon_r = \frac{h}{R}, \varepsilon_h = \frac{b}{2h}, r_q = 2\varepsilon_r \frac{q}{p}, p^* = P \frac{R^3}{g_{11} I_z}, \quad (33)$$

где  $h$  — полувысота поперечного сечения,  $b$  — ширина поперечного сечения,  $R$  — радиус осевой линии,  $p$  и  $q$  — величины внешнего и внутреннего радиального давления, приведённого к осевой линии.

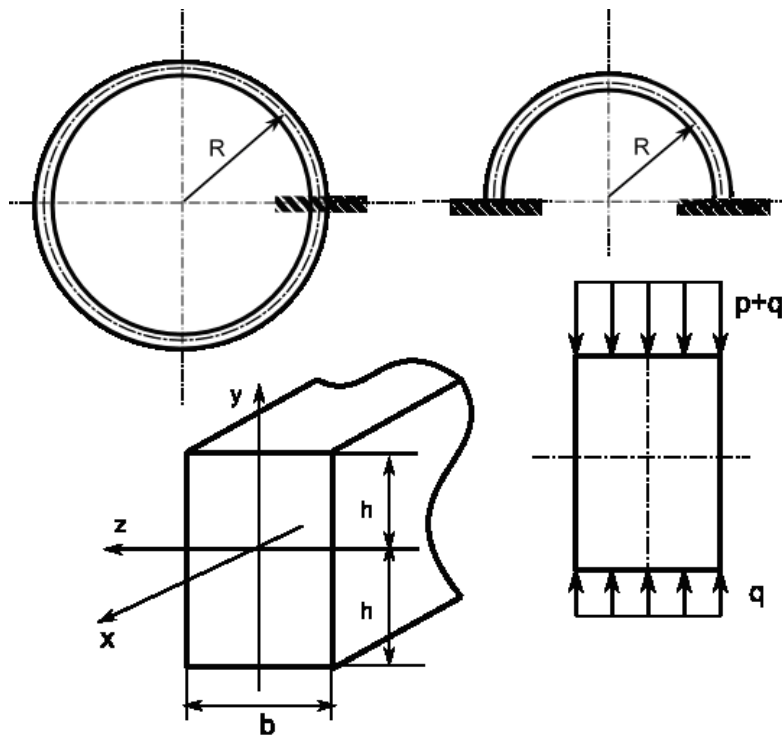


Рис. 1: Расчётные схемы кольца и арки

Анализировались формы потери устойчивости (ФПУ) и соответствующие им критические нагрузки для кольца Таблица 1 и арки Таблица 2. Выделяются две основные их ФПУ [1]: изгибно-сдвиговая и изгибно-крутильная. Чистая изгибно-крутильная ФПУ, представляющая собой кольцо в возмущённом состоянии в виде <восьмёрки> ( $w = \psi = 0, u \neq 0, v \neq 0, \chi \neq 0, \varphi \neq 0$ ), реализуется при выходе осевой линии кольца из плоскости с закручиванием поперечного сечения. Изгибно-сдвиговая ФПУ ( $v = \chi = \varphi = 0, w \neq 0, \psi \neq 0, u \neq 0$ ) характеризуется прогибом осевой линии в плоскости без закручивания поперечного сечения вокруг осевой линии. Анализируя приведённые ниже результаты расчётов для изотропного кольца и арки ( $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu = 0.3$ ), можно сделать вывод, что изгибно-крутильная ФПУ реализуется при меньшем значении критической нагрузки, чем изгибно-сдвиговая даже при квадратном поперечном сечении кольца. Проведённые вычислительные эксперименты показали, что учёт деформационных параметрических слагаемых в линеаризованных уравнениях нейтрального равновесия мало влияет на величину критической нагрузки.

Табл. 1: Кольцо

$r_q$	$\varepsilon_r$	$\varepsilon_h$	$p^*$	ФПУ	$p_\partial^*$	ФПУ $_\partial$
0	0.01	0.2	0.0479	И-К	0.0479	И-К
		0.5	0.2561	И-К	0.2561	И-К
		1	0.8663	И-К	0.8664	И-К
		2	0.9853	И-С	0.9855	И-С
		4	0.9853	И-С	0.9855	И-С
	0.05	0.2	0.0479	И-К	0.0479	И-К
		0.5	0.0434	И-С	0.0222	И-С
		1	0.8558	И-К	0.8580	И-К
		2	0.9413	И-С	0.9427	И-С
		4	0.9413	И-С	0.9427	И-С
0.001	0.01	0.2	0.0479	И-К	0.0479	И-К
		0.5	0.2560	И-К	0.256	И-К
		1	0.8661	И-К	0.8662	И-К
		2	0.9844	И-С	0.9845	И-С
		4	0.9844	И-С	0.9845	И-С
	0.05	0.2	0.0479	И-К	0.0479	И-К
		0.5	0.0434	И-С	0.0222	И-С
		1	0.8555	И-К	0.8577	И-К
		2	0.9404	И-С	0.9418	И-С
		4	0.9404	И-С	0.9418	И-С
0.01	0.01	0.2	0.0479	И-К	0.0479	И-К
		0.5	0.2557	И-К	0.2558	И-К
		1	0.8641	И-К	0.8642	И-К
		2	0.9757	И-С	0.9758	И-С
		4	0.9757	И-С	0.9758	И-С
	0.05	0.2	0.0479	И-К	0.0479	И-К
		0.5	0.0435	И-С	0.0223	И-С
		1	0.8536	И-К	0.8557	И-К
		2	0.9325	И-С	0.9338	И-С
		4	0.9325	И-С	0.9338	И-С

Продолжение на следующей странице

Табл. 1: Кольцо (продолжение)

$r_q$	$\varepsilon_r$	$\varepsilon_h$	$p^*$	ФПУ	$p_\partial^*$	ФПУ $_\partial$
0.1	0.01	0.2	0.0478	И-К	0.0478	И-К
		0.5	0.2528	И-К	0.2528	И-К
		1	0.8441	И-К	0.8442	И-К
		2	0.8967	И-С	0.8967	И-С
		4	0.8967	И-С	0.8967	И-С
	0.05	0.2	0.0478	И-К	0.0478	И-К
		0.5	0.0443	И-С	0.0227	И-С
		1	0.8331	И-К	0.8352	И-К
		2	0.8598	И-С	0.8606	И-С
		4	0.8598	И-С	0.8606	И-С
1	0.01	0.2	0.0463	И-К	0.0463	И-К
		0.5	0.2027	И-К	0.2027	И-К
		1	0.04954	И-С	0.4953	И-С
		2	0.4954	И-С	0.4953	И-С
		4	0.4954	И-С	0.4953	И-С
	0.05	0.2	0.0461	И-К	0.0462	И-К
		0.5	0.0545	И-С	0.0278	И-С
		1	0.4829	И-К	0.4826	И-К
		2	0.4829	И-С	0.4827	И-С
		4	0.4829	И-С	0.4827	И-С

Табл. 2: Арка

$r_q$	$\varepsilon_r$	$\varepsilon_h$	$p^*$	ФПУ	$p_\partial^*$	ФПУ $_\partial$
0	0.01	0.2	0.1728	И-К	0.1675	И-К
		0.5	1.0172	И-К	0.9640	И-К
		1	3.7688	И-К	3.4850	И-К
		2	9.3530	И-С	9.2650	И-С
		4	9.3534	И-С	9.2650	И-С
	0.05	0.2	0.1738	И-К	0.1682	И-К
		0.5	1.0162	И-С	0.09627	И-С
		1	3.7150	И-К	3.4576	И-К
		2	8.8767	И-С	8.9399	И-С
		4	8.8773	И-С	8.9406	И-С
0.001	0.01	0.2	0.1728	И-К	0.1675	И-К
		0.5	1.0171	И-К	0.9639	И-К
		1	3.7679	И-К	3.4839	И-К
		2	9.3438	И-С	9.2558	И-С
		4	9.3442	И-С	9.2559	И-С
	0.05	0.2	0.1738	И-К	0.1682	И-К
		0.5	1.0161	И-К	0.9626	И-К
		1	3.7140	И-К	3.4562	И-К
		2	8.8684	И-С	8.9311	И-С
		4	8.8690	И-С	8.9318	И-С

Продолжение на следующей странице



Табл. 2: Арка (продолжение)

$r_q$	$\varepsilon_r$	$\varepsilon_h$	$p^*$	ФПУ	$p_\partial^*$	ФПУ $_\partial$
0.01	0.01	0.2	0.1728	И-К	0.1675	И-К
		0.5	1.0163	И-К	0.9628	И-К
		1	3.7597	И-К	3.4731	И-К
		2	9.2616	И-С	9.1741	И-С
		4	9.2619	И-С	9.1741	И-С
	0.05	0.2	0.1737	И-К	0.1682	И-К
		0.5	0.01152	И-К	0.9613	И-К
		1	3.7044	И-К	3.4438	И-К
		2	8.7951	И-С	8.8529	И-С
		4	8.7957	И-С	8.8536	И-С
0.1	0.01	0.2	0.1727	И-К	0.1673	И-К
		0.5	1.0079	И-К	0.9499	И-К
		1	3.6621	И-К	3.3461	И-К
		2	8.5124	И-С	8.4299	И-С
		4	8.5126	И-С	8.4299	И-С
	0.05	0.2	0.1736	И-К	0.1680	И-К
		0.5	1.0052	И-С	0.9463	И-С
		1	3.5893	И-К	3.2960	И-К
		2	8.1226	И-С	8.1414	И-С
		4	8.1231	И-С	8.1421	И-С
1	0.01	0.2	0.1713	И-К	0.1644	И-К
		0.5	0.6347	И-К	0.5195	И-К
		1	1.5111	И-К	1.2952	И-К
		2	4.7044	И-С	4.3189	И-К
		4	4.7045	И-С	4.6551	И-С
	0.05	0.2	0.1717	И-К	0.1646	И-К
		0.5	0.6140	И-К	0.5027	И-К
		1	1.4580	И-К	1.2511	И-К
		2	4.5870	И-С	4.1671	И-С
		4	4.5873	И-С	4.5354	И-С

В таблицах величины безразмерной критической нагрузки  $p^*$  и  $p_\partial^*$  соответствуют расчётам при не учёте и учёте докритических деформационных слагаемых. В соответствующих нагрузкам столбцах ФПУ и ФПУ $_\partial$  введены сокращённые обозначения принятых сокращений названий ФПУ: <И-К> – изгибно-крутильная ФПУ; <И-С> – изгибно-сдвиговая ФПУ.

#### 4. Устойчивость арки под действием сосредоточенной силы

Приведём результаты решения задачи при действии на арку сосредоточенного усилия посередине пролёта, найденные как без учёта деформационных параметрических слагаемых в уравнениях, так и с их учётом Таблица 3.

При действии сосредоточенной нагрузки на арку учёт деформационных параметрических слагаемых в уравнениях устойчивости при некоторых значениях геометрических параметров оказывает существенное влияние как на величину критической нагрузки, так и на реализующуюся ФПУ. Так, например, уравнениями, составленными без учёта деформационных параметрических слагаемых, при  $\varepsilon_h = 1.0$  описывается пространственная изгибно-крутильная ФПУ, а уравнениями, составленными с учётом деформационных параметрических слагаемых – классическая изгибно-сдвиговая ФПУ, реализующаяся только при  $\varepsilon_h = 2.0$ .

Табл. 3: Арка под действием сосредоточенной силы

$r_q$	$\varepsilon_r$	$\varepsilon_h$	$p^*$	ФПУ	$p_\partial^*$	ФПУ $_\partial$
0	0.01	0.2	0.0630	И-К	0.0632	И-К
		0.5	0.3449	И-К	0.3472	И-К
		1	1.1894	И-К	0.4890	И-С
		2	1.2583	И-С	0.4890	И-С
		4	1.2582	И-С	0.4890	И-С
	0.05	0.2	0.0629	И-К	0.0632	И-К
		0.5	0.3434	И-С	0.3468	И-С
		1	1.1699	И-К	1.1723	И-С
		2	1.1946	И-С	1.1717	И-С
		4	1.1946	И-С	1.1717	И-С

## 5. Заключение

В отличие от задачи, рассмотренной в п.3, при действии на стержень сосредоточенного усилия, учёт докритических параметрических слагаемых значительно влияет на величину критических нагрузок и вид реализующихся ФПУ. Например, при  $\varepsilon_h = 1.0$   $p_\partial^*$  почти в два раза меньше  $p^*$ , а реализуется при этом плоская изгибно-сдвиговая ФПУ. Но при  $\varepsilon_r = 0,05$   $p^*$  и  $p_\partial^*$  практически равны, а ФПУ при этом различны.

Отметим, что в случае действия на кольцо или арку распределённой нагрузки полученные результаты численных решений при учёте деформационных параметрических слагаемых и при их отбрасывании мало отличаются друг от друга.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Паймушин В.Н., Полякова Н.В. Непротиворечивые уравнения теории плоских криволинейных стержней при конечных перемещениях и линеаризованные задачи устойчивости // Прикладная математика и механика. — 2009. — Т. 73, № 2. — С. 303–324.
2. Даутов Р.З., Паймушин В.Н. О методе интегрирующих матриц решения краевых задач для обыкновенных уравнений четвёртого порядка // Изв. вузов. Математика. — 1996. — № 10. — С. 13–25.

## REFERENCES

1. Paimushin V.N., Polyakova N.V. The consistent equations of the theory of plane curvilinear rods for finite displacements and linearized problems of stability // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 2009. — V. 73, № 2. — P. 220–236.
2. Dautov R.Z., Paimushin V.N. On the method of integrating matrices for the solution of boundary value problems for fourth-order ordinary equations // Russian Mathematics. — 1996. — V. 40, № 10. — P. 11–23.